*Merci de répondre au problème 1 et aux problèmes 2,3,4,5 sur des feuilles séparées.*

# 1 Pendule sur un wagon

Nous considérons un pendule dans le champ de gravité de la terre. Le pendule est monté sur un wagon, voir Figure. Le wagon (de masse M) bouge sans friction sur un plan horizontal. Le pendule consiste en une masse M, attachée à une corde de masse nulle et de longueur l. La corde est attachée à une tige verticale au point A. La tige est fixée de façon rigide sur le wagon.
La corde est initialement dans une position horizontale, i.e., la masse m est à la même hauteur que le point A. Au temps $t = 0$, la masse est relâchée de cette hauteur avec vitesse nulle.

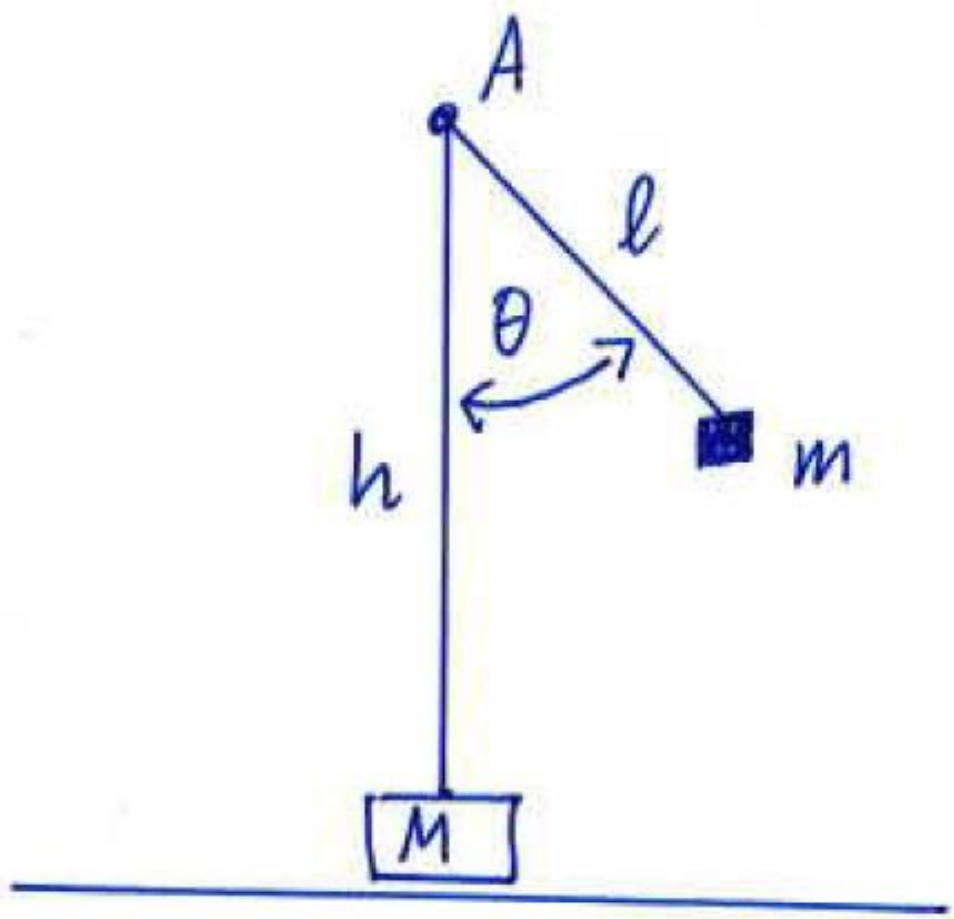


FIGURE 1 – Pendule sur un wagon.

*NB. : Plusieurs questions ci-dessous demandent une réponse* **qualitative**. *Ceci veut dire que votre réponse devra être concise mais argumentée en utilisant des phrases complètes. Toute affirmation doit être soutenue par une argumentation logique. Vous pouvez étoffer*

*votre réponse par des expressions mathématiques de toute quantité que vous considérez utile à discuter, mais votre réponse ne devra pas se limiter à des équations.*

1. Dans cette question, nous considérons le cas M >> m. Décrivez le mouvement des différentes parties du système d'abord qualitativement, puis quantitativement.
2. Dans le cas général où M et m sont données, décrivez *qualitativement* le mouvement des différentes parties du système.
3. Quelles quantités physiques sont des quantités conservées ? Pourquoi ? Donnez leurs valeurs en termes des constantes du problème.
4. Expliquez pourquoi l'état du système au temps $t$ peut être entièrement caractérisé par un angle $\theta$ qui donne la déviation de la corde de la position verticale. Exprimez en particulier la position du wagon en termes de $\theta$.
5. Quand $\theta$=0, i.e., quand la masse atteint sa position de hauteur minimale et la corde est dans une position verticale, quelles sont les énergies cinétiques de m et M ? Quelle est la vitesse de m à ce point ? Et celle de M ?
6. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $\frac{d\theta}{dt}$.
7. Donnez une solution *formelle* de cette équation différentielle sous forme d'une intégrale. *N'essayez pas d'intégrer !*
8. Dans la suite, nous considérons que m est une boîte de sable. Malheureusement, la boîte a un trou et le sable s'échappe à une vitesse $\frac{dm}{dt} = c$ de la boîte. On revient au cas M>>m. Comment change la description de la question 1 ?
9. Dans le cas général, décrivez qualitativement comment le mouvement des différentes parties du système est changé quand le sable s'écoule.
10. Décrivez qualitativement la trajectoire du sable.
11. Nous revenons à la situation où la masse m reste constante dans le temps. En revanche, dans cette question nous supposons que m et M portent des charges électriques qu'on notera respectivement $Q_m$ et $Q_M$. Nous considérons le cas $Q_m = Q_M = q$. Le fait que les masses sont chargées électriquement peut-il changer *qualitativement* le mouvement de m et M ?

# 2 Calcul des champs et potentiels électriques par la loi de Gauss

Un objet très long cylindrique est constitué d'un cylindre intérieur solide de rayon $a$, avec une densité de charge uniforme $\rho$, et un cylindre fin concentrique, de rayon $b$, avec une charge totale égale en magnitude à la charge du cylindre solide, mais de signe opposé. La charge est distribuée de manière uniforme sur la surface.

1. En utilisant les symétries du problème, calculer le champ électrique en tout point.
2. Calculer le potentiel électrique en tout point, choisissant $V = 0$ sur le cylindre extérieur.

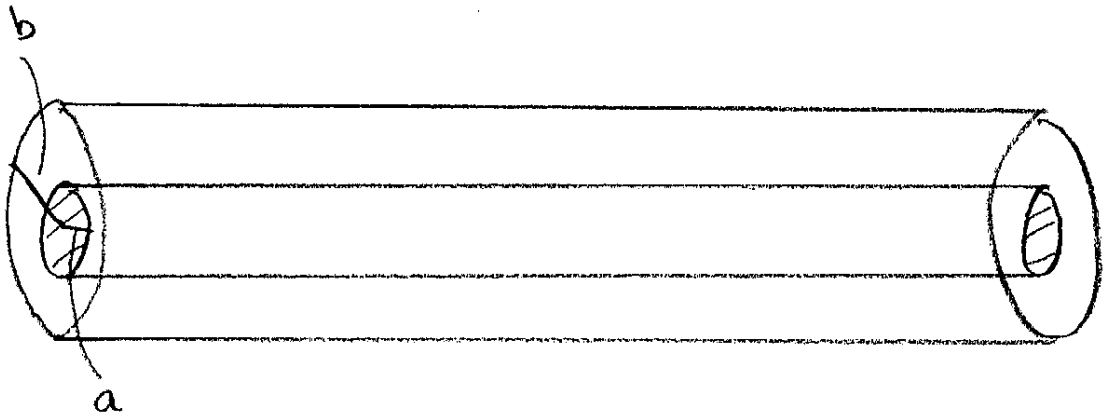


FIGURE 2 – Objet cylindrique.

3. Calculer l'énergie électrostatique $W$ par unité de longueur, utilisant l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\, d^3x = \frac{1}{2} \int \rho V d^3x \,. \tag{2.1}$$

# 3 Dipôles magnétiques

À ce jour, aucun monopole magnétique n'a été découvert. La configuration de champ magnétique la plus simple est celle créée par un dipôle magnétique, qui peut être modélisé par une boucle infinitesimale traversée par un courant électrique. Un dipôle, contrairement à une charge ponctuelle ou un monopole, est caractérisé par une magnitude et une direction. Pour une boucle dans le plan de surface $A$ qui transporte un courant $I$, le moment magnétique est donné par $\mathbf{m} = AI\hat{\mathbf{n}}$, avec $\hat{\mathbf{n}}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface dont le sens est déterminé par celui du courant via la règle de la main droite.

La force agissant sur un dipôle magnétique $\mathbf{m}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est donnée par

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \,. \tag{3.1}$$

1. Déduire (3.1) pour un dipôle créé par une boucle carré infinitesimal de coté $\epsilon$. Par souci de simplicité, nous supposons que la boucle est située dans le plan $yz$ avec les coins à $(0,0,0)$, $(0,\epsilon,0)$,$(0,0,\epsilon)$, $(0,\epsilon,\epsilon)$. Le courant circule de $(0,0,0)$ à $(0,\epsilon,0)$ etc. autour de la boucle. Calculer la force de Lorentz sur chaque côté du carré en remplaçant $\mathbf{B}$ par son développement de Taylor au premier ordre au voisinage de l'origine. Montrer que ce calcul reproduit (3.1) dans le cas consideré.
2. Nous souhaitons maintenant démontrer que la force qu'un dipôle magnétique $\mathbf{m_1}$ exerce sur un dipôle $\mathbf{m_2}$, avec $\mathbf{m_1}$ et $\mathbf{m_2}$ tous deux situés sur l'axe $z$ à une distance

$r$ l'un de l'autre et orientés dans la direction positive de l'axe $z$, est donnée par

$$\mathbf{F} = -\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi r^4}\hat{\mathbf{z}}\,. \tag{3.2}$$

Nous rappelons que le champ magnétique $\mathbf{B}$ au point $\mathbf{r}$ créé par un dipôle magnétique $\mathbf{m}$ positionné à l'origine est donné par

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(3(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m})\,. \tag{3.3}$$

(a) Exprimer l'équation pour le champ $\mathbf{B}$ (3.3) dans les coordonnées sphériques.

(b) Calculer la force entre $\mathbf{m_1}$ et $\mathbf{m_2}$. Nous rappelons que le gradient d'une fonction $f$ dans les coordonnées sphériques est donné par $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

(c) Comment change la force dans le cas où les dipôles sont inversement orientés ?

# 4 L'effet Meissner

Le champ électrique $\mathbf{E}$ s'annule dans un conducteur parfait, et la seule densité de charge possible est sur la surface du conducteur.

1. Démontrer que le champ magnétique est constant, c.à.d. $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}$, dans un conducteur parfait.
2. Démontrer que le flux magnétique à travers une boucle parfaitement conductrice est constant.

Un supraconducteur est un conducteur parfait dans lequel $\mathbf{B} = 0$. Cet effet est appelé l'effet Meissner.

3. Démontrer que le courant dans un supraconducteur est confiné sur la surface.

Des charges se déplacant sur une surface bi-dimensionnel créent un courant de surface $\mathbf{K}$. En présence d'une densité de charge de surface $\sigma$ et d'un champ de vitesse associé $\mathbf{v}$, $\mathbf{K} = \sigma\mathbf{v}$.

Nous supposons que le supraconducteur rempli le démi-espace en-dessous du plan $xy$ de telle sorte que le plan $xy$ corresponde à la surface du supraconducteur.

4. Démontrer que la composante perpendiculiare du champ $\mathbf{B}$ est continue à travers le plan $xy$.
5. Exprimer la discontinuité de la composante tangentielle du champ $\mathbf{B}$ en fonction du courant de surface $\mathbf{K}$.
6. Montrer que les réponses aux deux questions précédentes se résumment à l'équation $\mathbf{B}_{above} - \mathbf{B}_{below} = \mu_0(\mathbf{K}\times\hat{\mathbf{n}})$, où $\hat{\mathbf{n}}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et pointant dans la direction positive de l'axe $z$.

Une démonstration connue de supraconductivité est la lévitation d'un aimant au-dessus d'un supraconducteur. Nous étudierons ce phénomène en utilisant la méthode des images. Nous modélisons l'aimant par un dipôle parfait $\mathbf{m}$ qui est situé à une hauteur $h$ au-dessus de l'origine du système de coordonnées et contraint de pointer dans la direction positive de l'axe $z$, donc $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$. Nous rappelons qu'à cause de l'effet Meissner, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ quand $z \leq 0$.

7. Quelle est la valeur de $B_z$ directement au-dessus de la surface du supraconducteur ?
8. Remplacer le supraconducteur par un dipôle miroir pour reproduire cette valeur de $B_z$. Donner la magnitude, l'orientation, et la position du dipôle miroir.
9. À quelle hauteur $h$ au-dessus de la surface lévitera l'aimant, s'il a une masse $M$ et se trouve dans le champs gravitationnel terrestre ? La réponse à la question 2.2 peut être utilisée.

Le champ magnétique que nous avons modélisé par un dipôle miroir est en fait dû à un courant de surface $\mathbf{K}$ créé par la présence de l'aimant. Le courant peut être déterminé en considérant la composante tangentielle du champs $\mathbf{B}$ de la configuration. Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique est donné par équation (3.3).

10. En utilisant la relation trouvée ci-dessus entre la composante tangentielle du champs $\mathbf{B}$ et le courant de surface $\mathbf{K}$, démontrer que le courant de surface est donné par

$$\mathbf{K} = -\frac{3mrh}{2\pi(r^2 + h^2)^{5/2}}\hat{\boldsymbol{\phi}}\,.$$

Ici, $r$ dénote la distance à l'origine.

# 5 Force agissant sur une charge en présence de plans conducteurs

Nous supposons que les plans $xz$ et $yz$ sont conducteurs. Calculer la force $\mathbf{F}$ sur une particule de charge $q$ située à $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ en utilisant la méthode des images, c.à.d. en remplaçant les plans par des charges miroirs.